Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Démarrage d'un train à très haute vitesse et calcul d'une aire** (13 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités et obsolescence programmée des smartphones** (13 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2018/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse et calcul d’une aire

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse de 400 km/h en moins de deux minutes, et la distance parcourue est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L’exercice étudie cette fonction et ses applications, puis calcule par intégration l’aire d’une pièce dessinée pour les futures gares.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On écrit l’équation sous la forme $y' = 0,2y$. Les solutions d’une équation homogène $y' - ay = 0$ sont $y(t) = ke^{at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,2$. Cette famille est définie sur $[0, +\infty[$, et sa dérivée vérifie bien l’équation proposée. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée, puis on la remplace dans le membre de gauche de l’équation. Le calcul donne :

$g'(t) = -15$, et $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$.

Le résultat est égal au membre de droite pour tout $t \in [0, 3]$. La fonction proposée satisfait donc l’équation différentielle sur l’intervalle demandé.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Comme $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière, toutes les solutions de l’équation avec second membre s’obtiennent en lui ajoutant une solution de l’équation homogène associée. Cette dernière a été résolue à la question 1. La constante k est arbitraire, et les solutions sont définies sur $[0, +\infty[$.

1. Solution homogène : $ke^{0,2t}$.
2. Solution générale : $ke^{0,2t} - 15t - 75$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la solution f de l’équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu’à l’instant t = 0 le wagon est au point de départ.

On part de la solution générale $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale signifie que la distance est nulle au départ. En évaluant la solution en $t = 0$, on obtient $f(0) = k - 75$. Imposer $f(0) = 0$ fixe donc la constante. La fonction obtenue vérifie l’équation différentielle et la condition initiale.

$k - 75 = 0$, donc $k = 75$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions admises de f(t) et de f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

L'expression admise de la dérivée est $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$. Comme $15 > 0$, le signe de $f'(t)$ est celui de $e^{0,2t} - 1$. Pour tout $t \in [0, 3]$, on a $0,2t \geq 0$, donc $e^{0,2t} \geq 1$. L'égalité a lieu en $t = 0$, et l'inégalité est stricte pour $t > 0$.

- $f'(0) = 0$.
- $f'(t) > 0$ pour $0 < t \leq 3$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, avec égalité seulement en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur [0, 3].

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+
Valeur de $f(t)$	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45$
Variation de f	croissante	

La dérivée est positive sur tout l'intervalle sauf en son extrémité gauche, où elle s'annule. La fonction distance augmente donc de $t = 0$ à $t = 3$, sans intervalle de décroissance.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est croissante sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance parcourue après une minute est la valeur de la fonction en $t = 1$. On remplace donc t par 1 dans son expression, puis on évalue l'exponentielle :

$$f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052 \text{ km}.$$

L'arrondi au dixième de kilomètre conserve un chiffre après la virgule. La distance demandée est donc donnée à 0,1 km près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Distance parcourue après une minute : **1,6 km**.

Question 3° a). En utilisant f'(t) comme expression de la vitesse en kilomètres par minute, déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse instantanée est exprimée en kilomètres par minute et correspond à $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$. À deux minutes, l'exposant vaut $0,2 \times 2 = 0,4$. On évalue donc la dérivée à cet instant, puis on arrondit le résultat au dixième demandé.

$$f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377 \text{ km/min}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À deux minutes, la vitesse est de **7,4 km/min**.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée de 400 km/h en moins de deux minutes.

À deux minutes, la vitesse calculée est $7,377$ km/min. Pour la comparer à l'objectif, on la convertit en kilomètres par heure en multipliant par 60. La vitesse obtenue dépasse 400 km/h. Comme la vitesse est continue et vaut 0 au départ, elle atteint 400 km/h à un instant strictement compris entre 0 et 2 minutes.

- Vitesse à deux minutes : environ $442,6$ km/h.
- Le seuil est donc atteint avant deux minutes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de **400 km/h** est atteint avant deux minutes.

Question 4°. Choisir et recopier, sans justification, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

La tangente au point d'abscisse 2 s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En utilisant $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$, puis en regroupant les termes, on obtient l'équation de la troisième proposition. Il suffit de la recopier telle quelle.

$$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75.$

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir et recopier, sans justification, la valeur exacte parmi les trois propositions pour l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire, à partir du schéma et des données fournies.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, donc sa largeur vaut 3 unités. Son bord supérieur est la droite $y = 2,25$, et sa base repose sur l'axe des abscisses : sa hauteur vaut 2,25 unités. L'aire est le produit de ces dimensions. On retient la proposition correspondant à ce produit.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. Calculer l'aire A2, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3, en utilisant la primitive fournie.

La fonction $g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}$ est positive sur $[0, 3]$. L'aire cherchée est donc son intégrale sur cet intervalle. La primitive fournie est $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$; la constante s'élimine dans la différence des valeurs aux bornes.

$$A_2 = G(3) - G(0) = \frac{27}{4}\ln\left(\frac{18}{9}\right) \approx 4,679 \text{ u. a.}$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, en tenant compte de la symétrie de la pièce, puis arrondir au millième.

Dans la moitié droite, l'aire comprise entre le bord supérieur et la courbe vaut l'aire du rectangle moins l'aire sous g, soit $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on double cette aire. On utilise les valeurs exactes avant d'arrondir le résultat final au millième.

$$A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143 \text{ u. a.}$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Probabilités et obsolescence programmée des smartphones

Une association étudie, sur 200 smartphones, les liens entre obsolescence technique et logicielle, puis un service après-vente analyse la réparabilité d'un lot de modèles A. Enfin, une marque vérifie par un test bilatéral si un sondage sur l'obsolescence programmée est compatible avec la proportion annoncée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des pourcentages de l'énoncé, compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle, avec les totaux.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Sur 200 smartphones, 3 % représentent 6 appareils touchés par l'obsolescence technique et 8 % représentent 16 appareils touchés par l'obsolescence logicielle. Parmi ces 16, 12,5 % sont également touchés par l'obsolescence technique, soit 2 appareils. On complète les autres cases par différence, puis on vérifie que les totaux des lignes et des colonnes valent bien 200.

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l'obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	200

Sujets d'Examens de...

✓ RÉPONSE À RETENIR

Tableau complété : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour un smartphone choisi au hasard parmi les 200 étudiés, donner P(T), P(L) et la probabilité conditionnelle P_L(T), où T désigne l'événement « obsolescence technique » et L l'événement « obsolescence logicielle ».

L'énoncé donne directement les deux proportions marginales : 3 % des smartphones sont touchés par l'obsolescence technique et 8 % par l'obsolescence logicielle. Il précise aussi que, parmi les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont touchés par l'obsolescence technique. Cette dernière donnée est la probabilité conditionnelle de T sachant L, selon la notation de la question.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,03$, $P(L) = 0,08$ et $P_L(T) = 0,125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité que le smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle : P(T ∩ L).

Pour obtenir la probabilité que les deux événements se réalisent, on multiplie la probabilité de L par la probabilité de T sachant L. Les données de l'énoncé donnent donc $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01$. Autrement dit, 1 % des smartphones étudiés sont touchés simultanément par les deux types d'obsolescence.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0,010.$

Question 3° b). Calculer la probabilité que le smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence : P(T ∪ L).

Être touché par au moins un type d'obsolescence correspond à l'union des événements T et L. On additionne les probabilités de T et de L, puis on retranche leur intersection, comptée deux fois dans cette somme. Ainsi, $P(T \cup L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$. La proportion concernée par au moins l'un des deux types est donc 10 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0,100.$

Question 3° c). Calculer la probabilité conditionnelle P_T(L), c'est-à-dire la probabilité d'une obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

On cherche ici la probabilité de L parmi les smartphones touchés par T. Elle est égale à la probabilité de l'intersection divisée par la probabilité de T : $P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3}$. En arrondissant au millième, on obtient 0,333. Cela correspond à environ un tiers des smartphones touchés par l'obsolescence technique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) \approx 0,333.$

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que X, le nombre de smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise dans un stock suffisamment important. Chaque tirage est donc indépendant et la probabilité de tirer un smartphone non réparable reste la même, soit 4,5 %. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables obtenus au cours des 50 tirages. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres 50 et 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045).$

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables si aucun smartphone du lot n'est non réparable, c'est-à-dire lorsque $X = 0$. Pour un tirage, la probabilité d'obtenir un smartphone réparable est $1 - 0,045 = 0,955$. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, la probabilité que les 50 soient réparables vaut $0,955^{50}$, soit 0,100 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $0,100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme fourni, puis compléter le tableau pour i = 0, 1, 2 et 3 avec les valeurs de P(X = i) et de la somme cumulée S.

Pour chaque valeur de i, on calcule $P(X = i) = \binom{50}{i}(0,045)^i(0,955)^{50-i}$. L'algorithme ajoute successivement les termes correspondant à i égal à 0, 1, 2 et 3. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième, comme demandé dans l'énoncé. La somme cumulée de chaque colonne inclut les probabilités de cette colonne et des précédentes.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau des probabilités complété

i	0	0,236	0,272	0,205
$P(X = i)$	0,1			
S	0,1	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La variable S reçoit la somme des quatre probabilités correspondant aux valeurs de X de 0 à 3 incluses. Elle représente donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. En additionnant les valeurs exactes des termes de la loi binomiale, puis en arrondissant au millième, on obtient environ 0,813, soit 81,3 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S \approx 0,813$: environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte des smartphones non réparables.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est np. Ici, $E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$. Cette valeur n'est pas nécessairement un nombre entier pour chaque lot : elle décrit la moyenne attendue sur un grand nombre de lots de 50 smartphones. En moyenne, 2,25 smartphones par lot sont non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2,25$ smartphone non réparable en moyenne par lot de 50.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir et recopier la valeur approchée de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, la fréquence F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs s'étend approximativement de 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$. Arrondi au centième, h vaut 0,07, ce qui correspond à la réponse proposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Le test est bilatéral au seuil de 5 % : sous H_0, on conserve cette hypothèse si la fréquence observée appartient à l'intervalle central de probabilité 0,95. Avec la valeur proposée $h \approx 0,07$, cet intervalle est $[0,55 - 0,07\,;\, 0,55 + 0,07] = [0,48\,;\, 0,62]$. Une fréquence située hors de cet intervalle conduit au rejet de H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conserver H_0 si $0,48 \leq F \leq 0,62$; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Sur l'échantillon de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Conclure le test à partir de ce résultat.

La fréquence observée est $\frac{76}{180} \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation de H_0. Selon la règle du test bilatéral au seuil de 5 %, on rejette donc l'hypothèse $p = 0,55$. L'échantillon fournit une proportion observée inférieure à 55 %, sans établir pour autant la valeur exacte de p.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la fréquence observée est inférieure à 0,48.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2018, code MATGRB1, dure deux heures et son coefficient varie selon la spécialité. Elle étudie le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées couvrent les équations différentielles, l'étude de fonctions, le calcul intégral, les probabilités conditionnelles et binomiales, l'algorithmique et le test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 3t, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance ; la tangente en t = a vérifie y = f'(a)(t - a) + f(a).
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, E(X) = np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).
- Pour un test bilatéral au seuil de 5 %, comparer la fréquence observée à l'intervalle centré sur la proportion de H0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation homogène, une solution particulière et la condition initiale.
- Vérifier les unités de distance et de vitesse avant de comparer le résultat à l'objectif des ingénieurs.
- Dans un tableau à double entrée, contrôler la cohérence des effectifs avec les totaux et les probabilités conditionnelles.
- Pour le test, calculer la fréquence observée, appliquer la règle de décision et formuler une conclusion liée à H0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale f(0) = 0 permet ensuite de déterminer la constante dans la solution générale.

Q : Comment choisir la loi binomiale pour le lot de smartphones ?

Il y a 50 essais, chacun correspondant à un smartphone non réparable ou réparable. Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise et la probabilité de non-réparabilité reste 0,045. X compte le nombre de smartphones non réparables.

Q : Comment organiser son temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Repérez les questions accessibles, gardez du temps pour les calculs et les arrondis, puis vérifiez les unités et les réponses aux choix multiples.

Q : Qu'attend le jury dans la conclusion du test d'hypothèse ?

Il faut appliquer au seuil de 5 % la règle de décision à la fréquence observée, puis indiquer clairement si l'hypothèse nulle est rejetée ou non. La conclusion doit rester limitée à ce que permet l'échantillon.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2018/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Environnement Nucléaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.