Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ENVIRONNEMENT NUCLÉAIRE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité, durée de vie des tubes et conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2022/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1 -Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse en fonction du temps est étudiée. Les questions portent sur une équation différentielle, les variations et la limite de la fonction vitesse, la distance parcourue, un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$ donne directement les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a par sa valeur dans la formule. La constante k peut être choisie arbitrairement, y compris égale à zéro. Ces solutions sont définies sur l'intervalle considéré $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie par g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La fonction g est constante, donc sa dérivée est $g'(t) = 0$.
2. En remplaçant $g(t)$ et $g'(t)$ dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Ce résultat est égal au second membre de (E), donc l'égalité est vérifiée pour tout $t \in [0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Si y est une autre solution, la différence $y - g$ satisfait l'équation homogène associée (E_0). D'après la question 1.a, cette différence est de la forme $ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle. En ajoutant la solution particulière, on obtient toutes les solutions de l'équation avec second membre 4.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. D'après la question précédente, la solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$, soit $k = 15$.

On remplace cette valeur de k dans la solution générale. La fonction obtenue vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers zéro, et le produit $15e^{-0,8t}$ aussi. Le terme constant ne varie pas. Par somme des limites, la limite de $f(t)$ est égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et en donner une équation.

Une courbe représentative admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ lorsque la fonction tend vers la limite finie L en $+\infty$. Ici, la limite obtenue à la question précédente est 5. L'ordonnée de l'asymptote est donc constante et égale à 5, même si la courbe ne l'atteint pas nécessairement pour une valeur finie de t.

$$y = 5$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression admise f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Sur $[0; +\infty[$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ pour tout $t \geq 0$, ce qui prouve que f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		–
Variation de f	20	$\searrow$ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse décroît, mais sa limite lorsque le temps tend vers $+\infty$ est 5 m·s⁻¹. Elle reste donc supérieure à 5 pour tout temps fini et n'atteint jamais zéro. Dans le modèle donné par la fonction f, le chariot continue de ralentir sans s'arrêter.

- Vitesse initiale : 20 m·s⁻¹.
- Vitesse limite : 5 m·s⁻¹, strictement positive.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers 5 m·s⁻¹ sans atteindre zéro.

Question 4.a. La fonction F est définie par F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle, le premier terme donne $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. La dérivée de $5t$ vaut 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, ce qui est exactement l'expression de $f(t)$ sur $[0;+\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f sur cet intervalle. Calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. Par le théorème fondamental de l'analyse, la distance parcourue est $F(1) - F(0)$.
2. Le calcul donne $F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m.

L'évaluation numérique donne environ $15,3251$ m. Arrondie au centimètre, la distance est $15,33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne le polynôme de Taylor $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour écrire le développement limité à l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Comme $\frac{24}{5} = 4,8$, la proposition exacte est la troisième, qui associe ce polynôme à un reste de cette forme.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. L'énoncé donne $f(0) = 20$, et la dérivée admise vaut $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, donc $f'(0) = -12$. En reportant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient une droite de pente -12 passant par le point $(0; 20)$.

$$y = 20 - 12t$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> T : $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle qualité, durée de vie des tubes et conformité des rivets

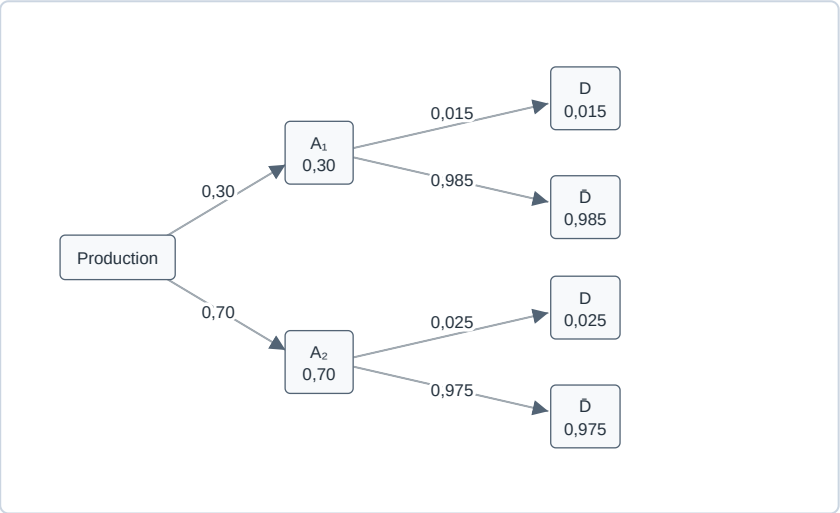
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut précisés. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de vie modélisée par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions produites dans chaque atelier et de leurs taux de défaut, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre commence par les probabilités de provenance, puis indique les probabilités conditionnelles de défaut. Pour chaque atelier, la branche « sans défaut » porte la probabilité complémentaire : 1 − 0,015 = 0,985 pour l'atelier 1 et 1 − 0,025 = 0,975 pour l'atelier 2. Les branches finales décrivent ainsi les quatre situations possibles.

Arbre pondéré de la production des tubes



D : tube défectueux ; D̄ : tube sans défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30 ; atelier 2 : 0,70. Taux de défaut respectifs : 0,015 et 0,025 ; taux sans défaut : 0,985 et 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

On cherche la probabilité que les deux événements se réalisent : le tube provient de l'atelier 1 et il est défectueux. On multiplie donc la proportion de production de cet atelier par son taux conditionnel de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cela représente 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer la valeur de P(D) indiquée dans l'énoncé, imprimée comme 0,0195. À noter : cette valeur est incohérente avec les proportions et taux de défaut donnés, et une annotation manuscrite sur la page indique 0,0220.**

Par la formule des probabilités totales, un défaut peut provenir de l'un ou l'autre atelier : $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0220$. Le calcul à partir des données imprimées donne donc 2,20 %, et non 0,0195. La valeur manuscrite 0,0220 est cohérente avec les proportions et les taux de défaut indiqués.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,0220$, soit 2,20 % ; la valeur imprimée 0,0195 est incohérente.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité recherchée est conditionnée par l'absence de défaut. La probabilité qu'un tube vienne de l'atelier 2 et soit sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. De plus, $P(\overline{D}) = 1 - 0,0220 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825/0,978 \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda$. Avec $\lambda = 0,0001$ par heure, on obtient $E(T) = 1/0,0001 = 10\,000$ heures. Dans ce contexte, la durée moyenne de bon fonctionnement est de 10 000 heures. C'est une moyenne pour l'ensemble des tubes, et non une durée garantie pour chacun.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, avec un résultat arrondi à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube prélevé ait une durée de bon fonctionnement inférieure à 8 000 heures.**

La loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme cette loi est continue, les probabilités associées à $T < 8000$ et à $T \leq 8000$ sont égales. Ainsi, $P(T < 8000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8000} = 1 - e^{-0,8} \approx 0,5507$. Arrondi au centième, le résultat est 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$, soit 55 %.

Question 3. Calculer, avec un résultat arrondi à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube prélevé ait une durée de bon fonctionnement supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser t est le complément de la probabilité de ne pas dépasser t : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec $t = 10\,000$ et $\lambda = 0,0001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-1} \approx 0,3679$. Arrondi au centième, cela donne 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$, soit 37 %.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. Sur 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes, donc $f = 975/1000 = 0,975$. La proportion estimée de rivets conformes dans la production est ainsi de 0,975, soit 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer, à l'aide de la formule fournie, un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

On applique la formule fournie avec $f = 0,975$ et $n = 1000$: $f \pm 1,96\sqrt{f(1-f)/n}$. Les bornes non arrondies sont environ 0,965323 et 0,984677. Arrondies au millième, elles deviennent respectivement 0,965 et 0,985.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS ENVIRONNEMENT NUCLÉAIRE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est de 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est de 3. Elle étudie le freinage d'un chariot et la production industrielle de tubes et rivets, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions et probabilités.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Si $f(t)$ tend vers L quand t tend vers $+\infty$, la droite $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe de f.
- La distance parcourue par un mobile entre deux instants est l'intégrale de sa vitesse sur l'intervalle considéré.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Distinguer une vitesse qui tend vers une valeur positive d'une vitesse qui atteint zéro en temps fini.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement conditionnant et utiliser la probabilité correspondante au dénominateur.
- Dans l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée, la taille de l'échantillon et l'arrondi demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre comme celle du sujet ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on détermine une solution particulière de l'équation complète. La solution générale est leur somme. La condition initiale permet ensuite de fixer la constante.

Q : Comment savoir si le chariot s'arrête à partir de sa fonction vitesse ?

Il faut déterminer si la vitesse atteint zéro à un instant fini. Si elle tend vers une limite strictement positive, elle ne s'annule pas pendant le freinage, même si elle diminue.

Q : Comment organiser le temps dans cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comprend deux exercices de 10 points, et les parties de chacun peuvent être traitées indépendamment. Répartissez votre temps entre les deux exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Quelle formule utiliser pour l'intervalle de confiance de la proportion de rivets conformes ?

Utilisez la formule de niveau 95 % fournie dans le sujet, avec la fréquence observée et un effectif de 1 000. Calculez les deux bornes, présentez l'intervalle et arrondissez séparément chaque borne à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2022/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Environnement Nucléaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.