Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (14 questions) — **Page 3**

2. **Magasin de vélos : probabilités et estimation statistique** (10 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2023/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1 -Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du meuble O et le point M du tiroir est modélisée par une fonction f du temps, en centimètres. L’exercice mobilise une équation différentielle, l’étude de la fonction, un algorithme et un développement limité pour analyser la fermeture du tiroir.

Partie A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les racines de l’équation sont $\frac{-5-3}{2}$ et $\frac{-5+3}{2}$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -4$ ou $r = -1$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D’après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale où M se trouve à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f'(0).

La distance initiale est la valeur de la fonction à l’instant 0. La vitesse de déplacement correspond à la dérivée de cette distance par rapport au temps. Les données initiales donnent donc directement les deux valeurs demandées.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression donnée :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette expression exacte vaut environ $3{,}157$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

À $t = 4$, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc $f(4) < 0{,}5$. Comme f est continue et que $f(0) = 20 > 0{,}5$, le seuil de fermeture est franchi entre 0 et 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B. Étude de fonction

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers zéro. Chacun des termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tend donc vers zéro, et leur différence aussi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente une équation de l'asymptote à la courbe C représentative de f.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est nulle. La courbe C se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée zéro, qui est son asymptote en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$:

$$f'(t) = \frac{70}{3}(-e^{-t}) - \frac{10}{3}(-4e^{-4t}).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La fonction est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en calculant les valeurs de f(t) arrondies au centième et en indiquant si la condition de la boucle est vraie ou fausse, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La boucle augmente t de $0{,}1$ tant que $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs de la colonne $f(t)$ sont arrondies au centième.

Ligne	t	$f(t)$	**Condition** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, lorsque $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3{,}8$, la condition est encore vraie. À $t = 3{,}9$, elle devient fausse et la boucle s'arrête. La distance est alors inférieure à $0{,}5$ cm : le tiroir répond au critère de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé selon le critère donné.

Question 4.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$. On remplace ces valeurs dans l'équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions à choix multiples, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée.

Le polynôme de Taylor à l'ordre deux, donné sur le sujet, est $20 - 10t - 15t^2$. Le développement limité s'obtient en ajoutant un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Il s'agit de la première proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 4.c. Indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro. Une seule réponse est attendue, sans justification.

Au voisinage de zéro, la différence entre la courbe et sa tangente vaut $f(t) - (20 - 10t) = -15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Pour t positif suffisamment proche de zéro, cette différence est négative.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C est en dessous de la tangente T.

2. Magasin de vélos : probabilités et estimation statistique

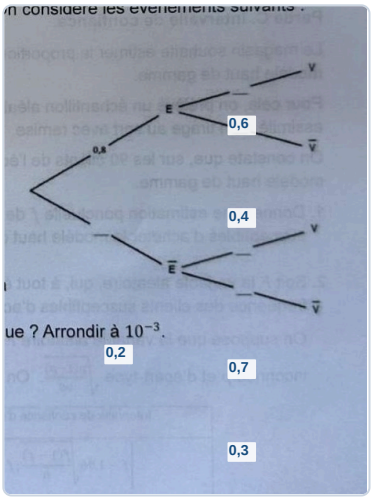
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir de réaliser une vente, avec des probabilités de vente distinctes selon le type de vélo. L'exercice étudie aussi les durées de réparation de vélos et l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, à partir des données suivantes : 80 % des vélos prêtés sont électriques et conduisent à une vente dans 60 % des cas ; 20 % sont mécaniques et conduisent à une vente dans 70 % des cas.

La première branche indique le type de vélo prêté. Les branches suivantes donnent les probabilités conditionnelles de vente et de non-vente. Pour chaque type, les deux probabilités complémentaires totalisent 1. Le schéma porte déjà la probabilité 0,8 sur la branche vers E ; les autres valeurs à inscrire sont celles indiquées sur le visuel.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Branches : 0,8 ; 0,2 ; 0,6 ; 0,4 ; 0,7 ; 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

Le chemin correspondant à l'événement « vélo électrique puis vente » a pour probabilité le produit des probabilités inscrites sur ses deux branches. On utilise la probabilité de prêt d'un vélo électrique et la probabilité conditionnelle d'une vente pour ce type : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.

Une vente peut suivre un prêt de vélo électrique ou un prêt de vélo mécanique. Ces deux issues étant incompatibles, on additionne les probabilités des deux chemins de l'arbre. La probabilité de chaque chemin est le produit de ses branches : $P(V) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. Sachant qu'un prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.

On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a conduit à une vente. On applique la formule de probabilité conditionnelle : $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Avec les résultats précédents, $P_V(E) = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$. L'arrondi demandé au millième est donc 0,774.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0,774$.

Partie B. Loi binomiale

Question 1. Un échantillon aléatoire de 80 vélos réparés est étudié. X compte ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.

La réparation de chaque vélo constitue un essai, avec une probabilité de succès égale à 0,62 : le vélo nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre. Le nombre d'essais est 80 et la variable X compte les succès. Les paramètres de la loi binomiale sont donc $n = 80$ et $p = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et $0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40}$. L'évaluation donne environ $0,008285$. Après arrondi au millième, on obtient $0,008$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Les 80 vélos se répartissent entre ceux nécessitant moins d'une heure, au nombre de X, et ceux nécessitant plus d'une heure, au nombre de $80 - X$. La condition demandée devient $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$. Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(80\,;\,0,62)$, la probabilité correspondante est environ $0,981$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité cherchée est $P(X \geq 41) \approx 0,981$.

Partie C. Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 90 clients, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. Donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. Ainsi, $f = \dfrac{54}{90} = 0,6$, soit une fréquence observée de 60 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,60$, soit 60 %.

Question 2.a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

On applique la formule fournie avec $f = 0,6$ et $n = 90$. La marge vaut $1,96\sqrt{\dfrac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,101214$. Les deux bornes sont donc obtenues en retranchant puis en ajoutant cette marge à 0,6.

Borne	Calcul	Valeur approchée
Inférieure	$0,6 - 0,101214$	0,499
Supérieure	$0,6 + 0,101214$	0,701

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Est-on certain que la proportion p appartienne à l'intervalle de confiance obtenu ?

Le niveau de confiance de 95 % ne garantit pas que la proportion inconnue appartienne à l'intervalle calculé pour cet échantillon. Il signifie que, lors de répétitions de la méthode sur de nombreux échantillons, environ 95 % des intervalles construits contiendraient la proportion réelle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on n'est pas certain que p appartienne à cet intervalle.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Les deux exercices évaluent équations différentielles, étude de fonction, probabilités conditionnelles, loi binomiale et intervalle de confiance, à travers un tiroir et un magasin de vélos.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent les exponentielles de la solution générale.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(t - a)$.
- Pour des événements E et V, $P(E \cap V) = P(E)P(V|E)$ et $P(V)$ s'obtient en additionnant les probabilités des branches menant à V.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f est exprimée en centimètres et t en secondes.
- Distinguer la position initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), qui est une dérivée.
- Dans la boucle « Tant que », vérifier la condition à chaque valeur de t et s'arrêter dès qu'elle devient fausse.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et ne pas confondre niveau de confiance et certitude sur p.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale composée de deux exponentielles, chacune associée à une racine.

Q : Comment traduire la comparaison des nombres de réparations dans la partie binomiale ?

Dans le modèle binomial retenu, X compte les réparations de moins d'une heure et 80 - X les autres. La comparaison demandée se traduit donc par $X > 80 - X$, soit $X > 40$.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties sont indépendantes selon les indications du sujet. Répartissez le temps entre eux, avancez sur les questions accessibles et gardez un moment pour vérifier calculs, arrondis et unités.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que la proportion p s'y trouve ?

Non. Pour un échantillon particulier, l'intervalle calculé ne garantit pas que p lui appartienne. Le niveau de confiance de 95 % caractérise la méthode : sur des échantillonnages répétés, environ 95 % des intervalles construits couvriraient p.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2023/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Environnement Nucléaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.