Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ENVIRONNEMENT NUCLÉAIRE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2023/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2 -Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond du tiroir, repéré par M, et le fond du meuble, repéré par O, est modélisée par f(t), en centimètres, où t est le temps écoulé depuis le début de la fermeture. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle, l'analyse de la fonction, un algorithme de seuil et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour résoudre le trinôme, on calcule son discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, il possède deux racines réelles distinctes. La formule quadratique donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On obtient ainsi les deux valeurs qui annulent l'expression caractéristique.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en s'appuyant sur le tableau fourni.

L'équation caractéristique associée à (E_0) est celle de la question précédente. Ses deux racines réelles distinctes sont -1 et -4. D'après le tableau fourni, à chaque racine r_i correspond un terme exponentiel $e^{r_i t}$. La solution générale est donc une combinaison linéaire de ces deux exponentielles, avec des constantes réelles arbitraires.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation à l'instant t = 0, où M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

Par définition, $f(t)$ mesure la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut 20 cm, donc la valeur de la fonction à l'origine est 20. La dérivée $f'(0)$ représente la vitesse instantanée de rapprochement, exprimée en cm·s⁻¹. La vitesse négative donnée dans l'énoncé est donc directement cette dérivée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression admise : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. Cette forme conserve la valeur exacte demandée. Pour vérification, l'évaluation numérique donne environ 3,1567 cm. La distance est positive, ce qui est cohérent avec le contexte.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}1567$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.

Pour vérifier l'affirmation, il suffit de trouver un instant inférieur à 4 s où la distance est déjà inférieure à 0,5 cm. À $t = 3{,}9$, la formule donne $f(3{,}9) \approx 0{,}4723$ cm. Cette valeur est strictement inférieure au seuil. Le tiroir est donc fermé avant 4 secondes, comme l'affirme le constructeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : à $3{,}9$ s, $OM \approx 0{,}4723$ cm, donc $OM < 0{,}5$ cm.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée pour e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, chacune des exponentielles tend vers 0. Les coefficients constants ne modifient pas ces limites, et la différence des deux termes tend elle aussi vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ vaut 0. Or, lorsqu'une fonction tend vers un réel L à l'infini, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. En appliquant cette propriété avec $L = 0$, on obtient l'équation de l'asymptote de la courbe représentative.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chacun des deux termes de f avec la règle de dérivation d'une composée. On a $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. Le second terme de la fonction étant précédé d'un signe négatif, sa dérivée contribue positivement. On rassemble ensuite les deux termes obtenus.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

L'énoncé donne $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle, donc f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, la limite calculée précédemment est 0. Ces informations donnent les valeurs de départ et d'arrivée ainsi que le sens de variation.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de f(t) arrondies à 10⁻² et l'état de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Chaque passage dans la boucle augmente t de 0,1. On calcule $f(t)$ aux instants demandés, mais la condition est testée avec sa valeur exacte, et non avec l'arrondi affiché. Tant que $f(t) > 0{,}5$, la boucle continue. Elle s'arrête dès que cette condition devient fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Arrêt à la ligne 39.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle continue à $t = 3{,}8$, car $f(3{,}8) \approx 0{,}522 > 0{,}5$. Elle augmente alors la variable de 0,1 s. À $t = 3{,}9$, on obtient $f(3{,}9) \approx 0{,}472 < 0{,}5$, et la condition devient fausse. L'algorithme s'arrête donc à ce premier instant testé où le seuil est atteint.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est alors fermé.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On intègre les deux exponentielles puis on évalue entre 0 et 4 : $\int_0^4 e^{-t}dt = 1 - e^{-4}$ et $\int_0^4 e^{-4t}dt = \frac{1}{4}(1 - e^{-16})$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{10}{12}(1 - e^{-16})\right]$. En regroupant les constantes et les termes exponentiels, on obtient exactement l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

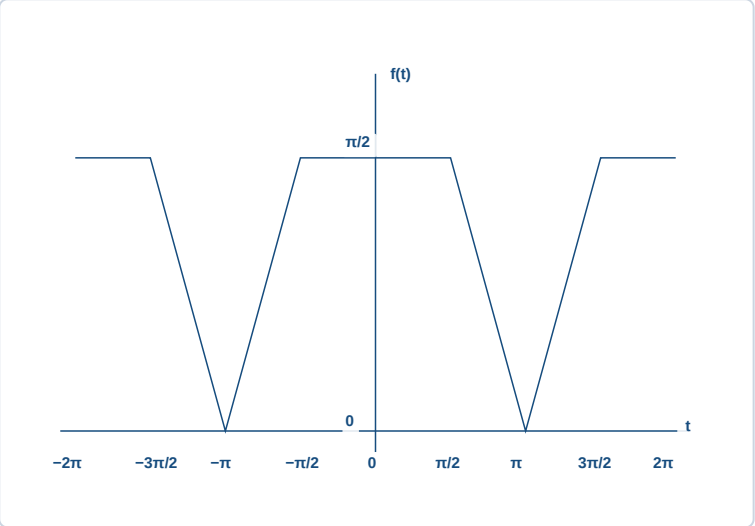
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice porte sur une fonction paire, périodique de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Il demande de tracer sa représentation, de déterminer ses coefficients de Fourier et une somme partielle, puis d'identifier la courbe correspondante et d'estimer l'erreur sur une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux, sa parité et sa période.

Sur \,$[0, \pi]$, le tracé est horizontal à la hauteur $\pi/2$ jusqu'à $t = \pi/2$, puis descend en ligne droite jusqu'à $(\pi, 0)$. La parité donne le même motif en miroir sur $[-\pi, 0]$, et la période 2π le répète sur tout l'intervalle demandé. Les minima sont donc en $-\pi$ et π, tandis que la fonction vaut $\pi/2$ aux extrémités $\pm 2\pi$ et autour de zéro.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé pair et périodique : minima $f(\pm\pi) = 0$, plateaux de hauteur $\pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Par périodicité, l'intégrale définissant b_n sur une période peut se calculer sur $[-\pi, \pi]$. Or f est paire, tandis que $\sin(nt)$ est impaire pour tout entier $n \geq 1$. Leur produit $f(t)\sin(nt)$ est donc impair. L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle, et le facteur $2/T$ dans la formule de Fourier ne change pas cette valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La période donnée est $T = 2\pi$. Le formulaire associe à une fonction de période T la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On remplace la période dans cette relation :

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

La pulsation est donc égale à un radian par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1.$

Question 4. **Démontrer que le coefficient de Fourier a₀ est égal à 3π/8.**

Pour une fonction paire, la moyenne sur une période vaut $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Les aires sous le graphe sur les deux intervalles sont :

Intervalle	Forme	Aire
$[0, \pi/2]$	Rectangle	$\pi^2/4$
$[\pi/2, \pi]$	Triangle	$\pi^2/8$

La somme vaut $3\pi^2/8$. En la divisant par π, on obtient le coefficient demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}.$

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur le premier intervalle, $f(t) = \pi/2$, et sur le second, $f(t) = \pi - t$. En séparant l'intégrale à $\pi/2$, on obtient :

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. **En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)[\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)]$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On applique la formule admise successivement aux trois indices. Les valeurs utiles des cosinus donnent directement les coefficients :

Indice	Calcul dans la formule	Coefficient
1	$\frac{2}{\pi}(0-(-1))$	$\frac{2}{\pi}$
2	$\frac{2}{4\pi}(-1-1)$	$-\frac{1}{\pi}$
3	$\frac{2}{9\pi}(0-(-1))$	$\frac{2}{9\pi}$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. **En déduire que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

1. La somme partielle est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$.
2. Les coefficients b_n sont nuls. On remplace alors a_0, a_1, a_2 et a_3 par leurs valeurs établies aux questions précédentes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes représentées est associée à la fonction s_3.**

La courbe numéro 3 présente les minima en $t = \pm\pi$ et les plateaux autour de $t = 0$, conformément à l'allure de la somme partielle s_3.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Avec $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

Avec les coefficients obtenus, on calcule :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}.$$

L'évaluation de cette expression, arrondie à 10^{-4} près, donne le résultat ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. Sachant que F est la valeur efficace de f, que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

On compare l'approximation P à la valeur exacte $F^2 = \pi^2/6$. L'écart relatif est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$, soit environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les trois choix proposés, cette valeur correspond à l'approximation d'erreur $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une fonction périodique paire avec les séries de Fourier.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Pour $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, la limite en $+\infty$ est 0 et l'asymptote horizontale est $y = 0$.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et a_n se calcule sur la demi-période selon la formule du formulaire.
- La pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; pour une période $T = 2\pi$, on obtient $\omega = 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Relier la distance à f(0) et la vitesse initiale à f'(0), en conservant le signe négatif indiqué.
- Dans l'algorithme, suivre les incréments de 0,1 et tester la condition après chaque incrément.
- Pour les coefficients de Fourier, utiliser la parité et la période ainsi que les formules du formulaire.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2, qui est la valeur de référence donnée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent les exponentielles de la solution générale. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. La formule des coefficients de Fourier donne alors $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment interpréter l'algorithme de seuil de l'exercice sur le tiroir ?

L'algorithme augmente t par pas de 0,1 tant que f(t) reste supérieure à 0,5 cm. À son arrêt, la valeur de t est le premier pas testé pour lequel la distance ne dépasse plus le seuil de fermeture.

Q : Quelles consignes particulières concernent la question sur le pourcentage d'erreur ?

Il faut recopier une seule réponse parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, sans justification. Le sujet précise qu'une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsen.fr/assets/annales/bts-en/E2 - Mathématiques/2023/BTS EN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Environnement Nucléaire : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.